



Physique discrète. Discrétisation du temps et de la matière

Claude Cadoz, Annie Luciani, Jean-Loup Florens, Olivier Raoult

► To cite this version:

Claude Cadoz, Annie Luciani, Jean-Loup Florens, Olivier Raoult. Physique discrète. Discrétisation du temps et de la matière. Premier colloque de géométrie discrète en imagerie. Fondements et application, Sep 1991, Strasbourg, France. pp.21. hal-00910512

HAL Id: hal-00910512

<https://hal.science/hal-00910512>

Submitted on 8 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PHYSIQUE DISCRETE

DISCRETISATION DU TEMPS ET DE LA MATIERE

Claude CADOZ - Annie LUCIANI - Jean Loup FLORENS - Olivier RAOULT

ACROE - LIFIA

Institut IMAG

46 av. Félix Viallet - 38 031, Grenoble Cedex

I. OU TOUT SE PASSE AUX FRONTIERES

Dans son activité de représentation (de modélisation) de la nature pour la connaissance, l'homme élabore des outils formels tels que la géométrie euclidienne, la physique analytique ... Ceux-ci peuvent, dans une certaine mesure, être pensés indépendamment des contraintes matérielles qui apparaissent dès lors que, dans cette activité de représentation, s'immisce des processus d'expérimentation et d'action.

Ceux-ci supposent des organes technologiques de deux types :

- * des transducteurs d'entrée et de sortie (capteurs et émetteurs)
- * des organes de traitement , ou d'analyse, de l'information captée

Une première question se pose alors : celle de l'influence des contraintes imposées par ces organes matériels dans le processus général de représentation, c'est à dire de leur incidence sur les théories elles-mêmes.

Ainsi, ce qui fonde la géométrie discrète comme nécessité, est à la fois l'apparition du pixel comme particule élémentaire de l'espace, introduite par les capteurs et les émetteurs d'images, et le choix de l'ordinateur, essentiellement basé sur l'arithmétique et la logique.

Une deuxième question se pose alors : celle du lien interprétatif entre les modèles formels "continus" du monde réel et les modèles logico-arithmétiques nécessairement discrets. Si nos évaluations du monde réel se font par l'intermédiaire des premiers, si leur modélisation objective (perception, traitement et action par des machines) se font par les seconds, alors, il faut soit théoriser le passage des uns aux autres, soit fonder des théories totalement discrètes des phénomènes à étudier.

Ce que nous venons de décrire pour le "pixel" et le traitement numérique (arithmétique et logique) de l'image, vaut lorsque le propos est de représenter, par l'intermédiaire d'organes matériels de même nature (capteurs, émetteurs, ordinateurs), l'univers physique.

De même que, partant de la communication entre l'ordinateur et l'univers extérieur, au niveau des transducteurs, s'est défini l'atome de base du traitement des images - le pixel -, de même nous pouvons définir les atomes nécessaires au processus de représentation "arithmético-logique" des objets physiques, par l'analyse des contraintes intrinsèques imposées par la communication entre l'ordinateur et le monde naturel.

Rappelons tout d'abord qu'un système physique nécessite pour sa description deux types de variables et deux seulement. Il s'agit de variables dites duales : les variables intensives (forces, intensité, pression, ...) et les variables extensives (positions, potentiels, ...), la physique étant l'ensemble des règles reliant les deux. Dans tous les cas, ces deux variables duales satisfont les règles de Kirshoff : Les variables intensives sont circulantes et additives (équilibre d'un corps : $\Sigma F=0$); les variables extensives sont localisées.

La communication de variables physiques duales (forces et positions par exemple) entre l'ordinateur et le monde extérieur passe nécessairement par des capteurs et des moteurs.

En lieu et place de champs de forces, de pressions, de déplacements, transitant par des surfaces de communication, les capteurs et effecteurs nous proposent des signaux uni- ou multi-dimensionnels, circulant par des ensembles finis de lignes et correspondant à des ensembles finis de points de contacts ou d'émission.

De plus, les mêmes capteurs et émetteurs effectuent leur transmission dans un sens déterminé : du physique vers l'électronique pour les premiers, dans l'autre sens pour les seconds. Cela ne présente pas d'inconvénient majeur pour le canal acoustique ou pour le canal visuel, dans la mesure où l'un et l'autre sont, en tant que canaux de perception essentiellement unidirectionnels. L'émission acoustique et l'émission visuelle pourront alors être représentée par des relations orientées de l'objet vers l'extérieur.

Par contre la relation qui s'établit entre nos organes gestuels et les objets qu'ils manipulent est, en tant que relation mécanique, intrinsèquement bi-directionnelle. Deux types de variables, duales (forces et déplacements ou forces et vitesses) y circulent sans que l'on puisse leur assigner une direction particulière. Toute relation mécanique avec l'objet doit alors être représentée par un couple de relations uni-directionnelles orientées en sens inverses.

Principe

Les communications entre l'outil de représentation numérique qu'est l'ordinateur et l'univers physique extérieur sont nécessairement en nombre fini, ponctuelles et orientées (Figure 1 A et B).

Conséquence 1

Comme les liaisons sont orientées (force en entrée, force en sortie, position en entrée, position en sortie), il existe deux types opposés de points de communication : ceux par lesquels entrent des forces et sortent des positions et ceux pour lesquels c'est l'inverse. (Figure 1 C et D)

Cette circonstance étant indissociable de la simulation même de l'univers physique à l'aide d'une machine informatique, elle est indépendante des réalisations effectives de ces simulations et nous lui avons attaché une terminologie : nous désignons les points de communication du premier type "POINTS M", ceux du second type "POINTS L". (Figure 1 E et F).

Tout objet simulé se présentera donc nécessairement à l'extérieur, quelque soit l'objectif de communication, sous la forme décrite en Figure 2.

Remarques :

- Tous les points de communication avec l'extérieur sont définis selon l'un des deux types M ou L, y compris les communications unidirectionnelles correspondant aux signaux sonores ou visuels. Pour ces derniers, on considère en effet qu'il s'agit de communications bi-directionnelles dégénérées.

- Les variables duales choisies dans cet exposé sont les forces et les positions. Le raisonnement vaudrait pour d'autres choix. En particulier, pour les phénomènes purement sonores, on aurait pu prendre les vitesses au lieu des positions, mais ce choix aurait été moins général et incompatible avec la définition géométrique des objets, qu'il s'agisse des objets destinés à la production d'images animées ou de ceux qui entrent dans l'espace gestuel (manipulation par des effecteurs). L'expérience montre qu'il est techniquement plus facile de passer des positions aux vitesses lorsque c'est nécessaire que des vitesses aux positions.

- Les règles de connexion sont définies par la nature intensive ou extensive des variables. Il s'agit des règles générales de Kirshoff aux noeuds et aux mailles d'un réseau physique. Elles imposent qu'un point L ne soit connecté qu'à un unique point M, alors qu'un point M peut supporter de nombreuses connexions à des points L.

- Rappelons que les variables circulant par les points de communication peuvent être uni- ou multi-dimensionnelles.

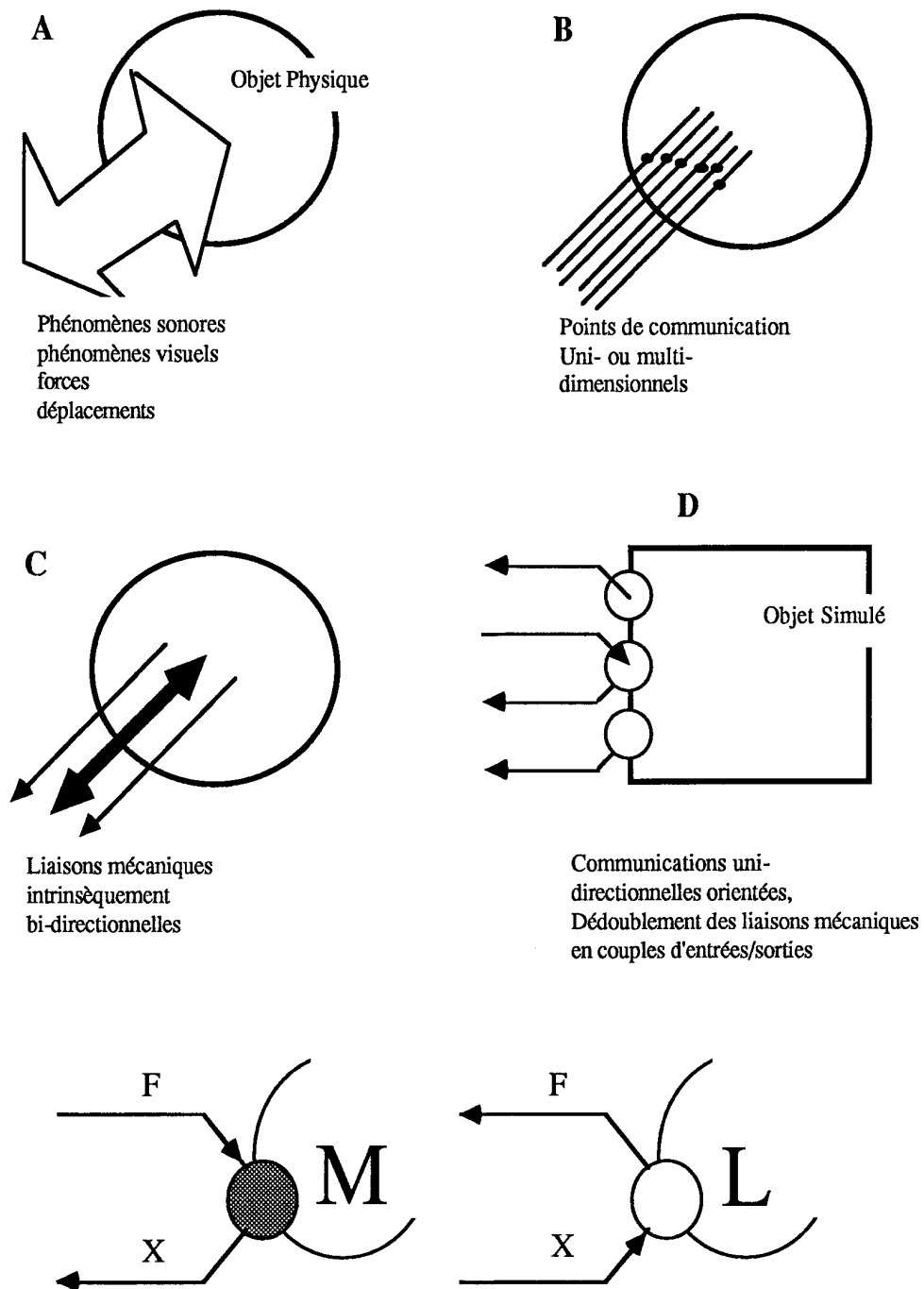


figure 1

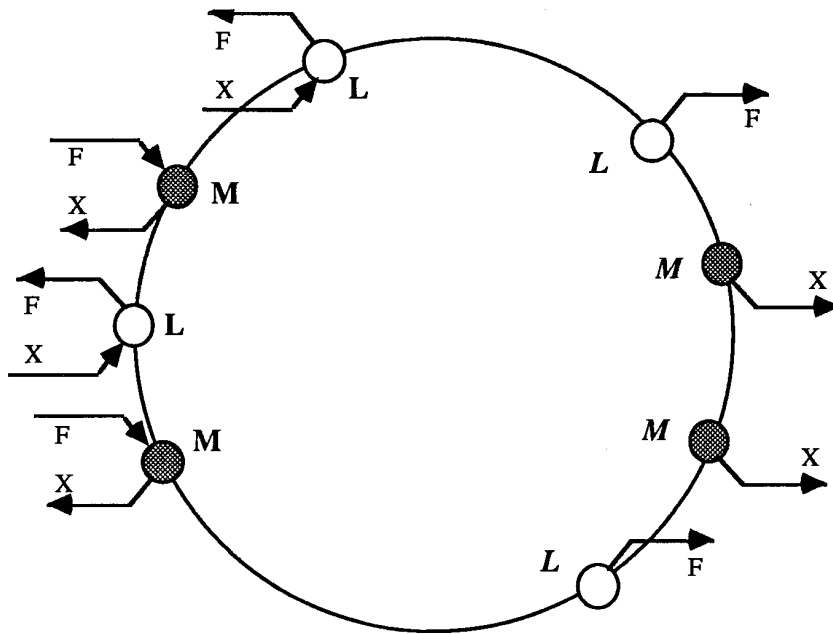


figure 2

I.1. L'équivalent "pixel" en physique discrète

Regardons maintenant, d'un point de vue toujours purement formel quel pourrait être, au niveau le plus élémentaire, les objets satisfaisant ces contraintes de communication imposées par les transducteurs et la représentation discrète.

Le plus petit objet envisageable est celui qui comporte un seul point de connexion. Il y en a alors de deux sortes, selon que ce point est de type M ou de type L. Un atome M correspondrait à un algorithme calculant une position dans l'espace à partir d'une force, un atome L calculerait une force à partir d'une position.

Conséquence 2

C'est là que l'on voit que la nature même du support technologique, qui nous avait tout d'abord imposé des communications ponctuelles entre l'opérateur et l'objet, puis entre les constituants de l'objet, nous conduit en ligne droite à cette conséquence : dans cet univers, au niveau atomique, l'on ne peut faire qu'une physique du point. La matière, comme le temps, est nécessairement discrétisée et localisée en des points, et comme pour le temps, il faudra jouer avec les mailles de notre propre système de perception et d'action (ou les systèmes de perception ou d'action artificielles) pour que, ne trahissant pas le discontinu, elles nous laissent croire au continu.

Un système exclusivement constitué d'atomes M et d'atomes L ne peut donner lieu, compte tenu des règles de connexion, à une variété d'objets. Une seule figure est possible : une étoile formée d'un seul atome M, environné d'autant d'atomes L qu'on le souhaite. Pour pouvoir construire une plus grande variété d'objets, il faut des atomes un peu plus complexes, il faut introduire un autre type d'attache entre ces atomes à un point. Suivant un principe d'économie, cherchons le nombre minimal d'attaches qui permette de constituer un système d'atomes générique. Une rapide investigation montre qu'une seule attache suffit et, de plus que le seul cas possible est celui où elle relie deux points L. Dans les deux autres cas, l'on ne peut obtenir que des figures limitées : une étoile à noyau double si l'on construit un atome à l'aide de deux points M, un arbre strict (sans boucle) dans le cas où l'on construit un atome à l'aide d'un point M et un point L. Dans le dernier cas, on obtient tous les réseaux possibles (Figure 3).

Ainsi, la plus petite décomposition possible donnant lieu à un système générique est celle où l'on a deux types d'atomes distincts, l'un correspondant à un point M seul, l'autre à une paire de points L indissociables.

L'atome à un point M a une localisation, ponctuelle, dans l'espace puisque son algorithme calcule des positions (X) au cours du temps à partir de forces appliquées par son environnement. Il produit la variable extensive. Appelons le <MAT>.

L'atome à deux points L n'a de localisation spatiale que via les atomes <MAT> auxquels il est nécessairement connecté. Calculant deux forces à destination de ces points à partir des seules choses qu'il connaisse d'eux - leurs positions - il établit une liaison entre eux. Il produit la variable intensive. Appelons le <LIA>.

Enfin, le respect du principe d'action-réaction, demande de garantir dès le niveau atomique que les deux forces calculées par l'atome <LIA> à destination de deux composants <MAT> soient égales en intensité et de sens opposés (Figure 4).

On notera bien la différence entre connexion et liaison. La connexion est un lien qui permet la circulation des variables mécaniques, la liaison est un atome auquel correspondra un algorithme.

Avec ces deux atomes : <MAT> et <LIA>, on peut construire toutes les figures possibles.

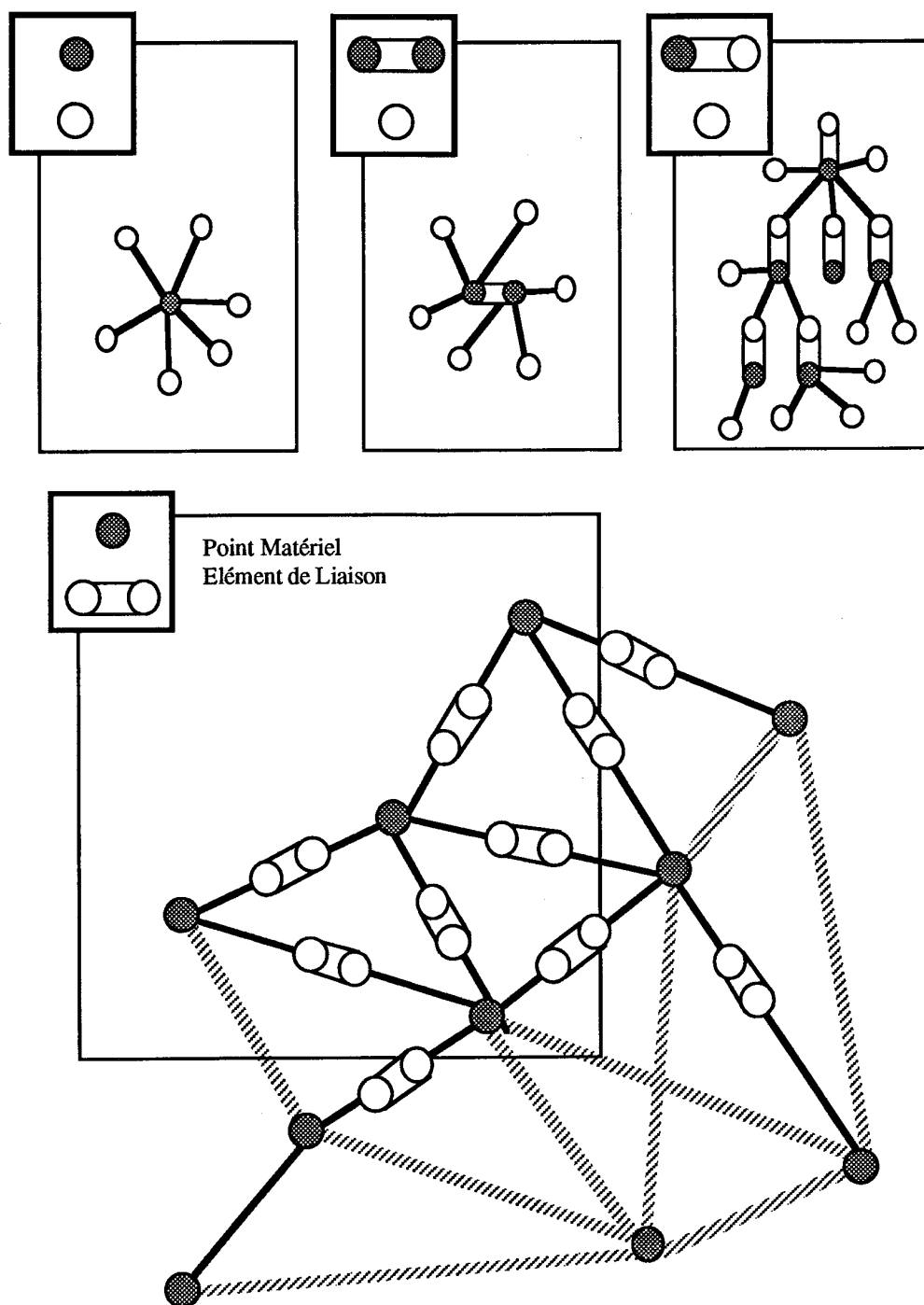


Figure 3

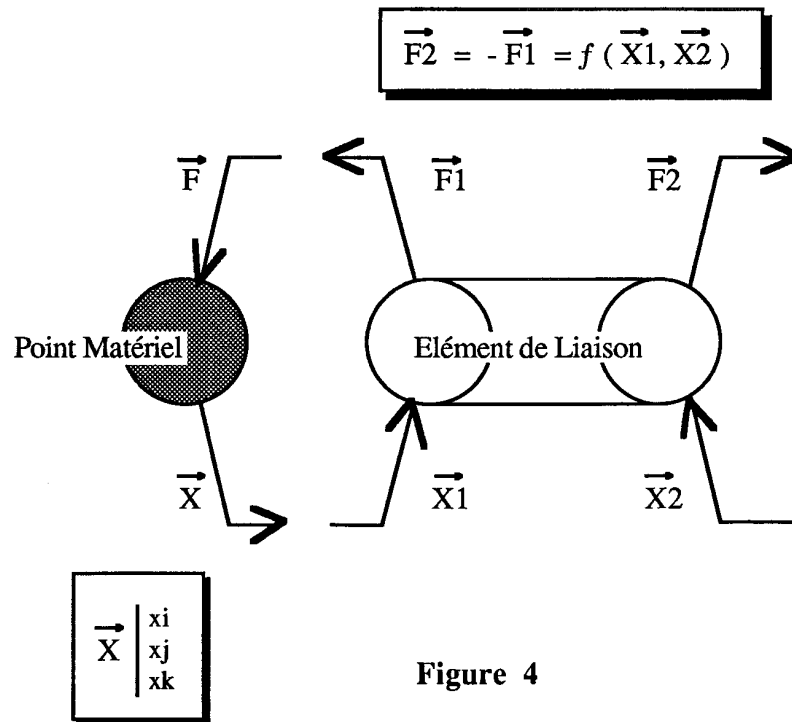


Figure 4

Ce formalisme constitue la base générique de CORDIS-ANIMA, système de modélisation et de simulation de l'univers physique. C'est pourquoi, nous appellerons le réseau ci-dessus réseau de type CORDIS.

Ces deux atomes permettent, à condition de disposer des algorithmes appropriés et de la puissance de calcul nécessaire, de construire tous les objets physiques que l'on est susceptible de vouloir simuler à l'aide d'une machine numérique. Remarquons qu'à ce niveau, rien n'est encore déterminé quant aux algorithmes encapsulés dans les atomes.

Enfin, l'objet le plus général est un réseau dont les nœuds sont des atomes <MAT>, les arcs des atomes <LIA> et dans lequel chaque nœud est relié à tous les autres (graphe complet). Remarquons qu'à ce niveau rien n'est déterminé quant au contenu algorithmiques des atomes.

Conséquence

La base de toute représentation discrète d'un système physique comprend deux atomes de base et deux seulement : un atome qui produit des forces (<LIA>) à partir des positions et un atome qui produit des positions à partir des forces (<MAT>).

Ce serait le doublet d'atomes (<MAT>, <LIA>) qui jouerait en physique discrète l'équivalent du pixel (P).

II. DEUX PROBLEMES MAJEURS NOUVEAUX

II.1. Enoncé

L'opération de base en physique est le couplage mécanique entre deux corps.

Toute transformation du matériau d'un objet (ou transformation de la configuration d'un ensemble d'objets) est descriptible par le choix d'un couplage entre différentes parties d'un objet ou entre les objets¹.

La principale propriété de cette opération peut s'exprimer ainsi :

Un objet (ou un ensemble d'objets physiques) est composé de corps en interaction permanente. A chaque instant et simultanément A agit sur B et B agit sur A. Les objets A et B en interaction sont **"NON-SEPARABLES"**.

La représentation du système A/B/couplage sera constituée (1) de boîtes communicantes séparées (exemple : réseau CORDIS), et aura pour principales caractéristiques d'être (2) à temps de calcul non nul (à chaque boîte correspond un algorithme) et (3) à instant indexé (temps échantillonné). Cela dévoile deux notions fondamentales.

La première notion que nous avons appelé **"Modularité algorithmique"** est liée à (1) et (3). Existe-il une ou plusieurs organisations du réseau qui représentent correctement le système ? Dit autrement : est-ce que si Algorithme_A représente correctement A et Algorithme_B représente correctement B, est-ce que :

Algorithme_A (+a) Algorithme_B =? Algorithme_(A (+m) B)
avec (+a) : la connexion au niveau algorithmique
et (+m) : la connexion au niveau physique

La seconde notion, appelée **"T-Simulabilité"** (T comme temps) est essentiellement liée à (2). Si A est l'univers extérieur, A sera un objet "à temps continu" et B sera un objet à temps discret. La consistance temporelle à la frontière entre ces deux univers (temps continu et temps discret) ne sera obtenue que sous certaines conditions d'arrangement et d'exécution du réseau discret. Ces arrangements existent-ils et sont-ils formalisables ?

¹ En géométrie, l'opération de base est la relation spatiale (le couplage) entre objets géométriques. Par exemple la transformation d'un objet en un autre par rotation, ou le couplage entre formes définissant des propriétés macroscopiques comme la convexité.

II.2. Préalables à l'exposé de ces deux problèmes

Le système des algorithmes est élaboré à partir des atomes <MAT> et <LIA>. Il faut d'abord tenter de tout construire à partir de ces deux atomes. Mais, ceux-ci peuvent exister sous plusieurs variétés. S'ouvre alors une démarche à deux niveaux. Tout d'abord, il faut trouver les variétés minimales de chaque catégorie qui permettraient la description de tout objet physique observable (définir une "base" d'algorithmes). Ensuite, il faut associer à chaque variété un ou plusieurs algorithmes exécutables.

Sans entrer dans le détail de ces deux niveaux, donnons quelques éléments nécessaires à la suite du développement :

Structure des algorithmes et de la simulation

Les algorithmes sont des séquences d'opérations logico-arithmétiques qui peuvent comporter des branches conditionnelles exécutées ou non en fonction de conditions sur les variables d'état physiques (forces et positions) et de résultats sur les opérations.

Une simulation se réalise par la répétition cyclique des algorithmes. A chaque cycle, un algorithme de simulation produit ses variables de sortie (forces ou positions) à partir de ses variables d'entrée (F ou P). La fréquence de répétition est directement liée à celle de l'échantillonnage des signaux d'entrée et des signaux de sortie selon les conditions de Shannon.

Pour des raisons qu'il serait trop long d'expliquer ici, les instants d'échantillonnage des entrées et des sorties générales, c'est-à-dire en provenance et à destination de l'extérieur de l'objet représenté, sont rigoureusement synchrones et une seule horloge de période T les détermine.

Le contexte matériel est un ensemble de plusieurs processeurs capables d'exécuter en parallèle de tels algorithmes, de se synchroniser et d'échanger des représentations de variables physiques.

Un premier choix est de tout construire à partir des deux atomes, le point matériel et l'élément de liaison, sachant toutefois qu'ils peuvent tous deux exister sous diverses variétés .

Un deuxième choix est de s'intéresser d'abord à des éléments auxquels on peut associer un objet, ou tout au moins le modèle d'un objet appartenant au monde physique.

Quelques algorithmes d'objets physiques élémentaires

Un objet physique élémentaire est une liste de variables d'états (quantifiées et échantillonnées) et de paramètres (quantifiées), associée à un algorithme d'évolution qui traduit la modification spontanée de l'objet lorsque l'on avance d'un pas de temps T_e . Par exemple, une masse ponctuelle est définie par trois variables d'états : sa position spatiale courante X (ou X, Y, Z en 3D), sa position retardée X_r , la somme des forces extérieures à l'instant courant F . Elle possède un paramètre de masse M . Sa loi d'évolution est donnée par l'algorithme

$$\text{tmp} := X ; X := (2.X - X_r + 1/M.F) ; F := 0 ; X_r := \text{tmp} ;$$

Cette masse est un dipôle qui "consomme" (et annule) les forces extérieures en se déplaçant. Ce dipôle "produit" une position et conserve, en interne, sa position précédente.

Une interaction physique élémentaire est un algorithme de modification de variables d'états qui ne lui appartiennent pas. Par exemple, un ressort pur est un quadripôle utilisant deux positions X_1 et X_2 (les positions des extrémités du ressort) pour calculer deux forces égales et opposées. Il possède deux paramètres, la raideur R et la longueur au repos LR

$$F_1 := K.(X_1 - X_2) - LR ; F_2 := -F_1 ;$$

Un assemblage d'éléments matériels par un élément d'interaction consiste à identifier les variables adéquates (au sens de rendre identique, situer à une même adresse en mémoire). La figure 5 illustre l'aspect dipolaire des objets, l'aspect quadripolaire des interactions et le caractère de réseau que prend un objet composé (ici deux masses reliées par un ressort).

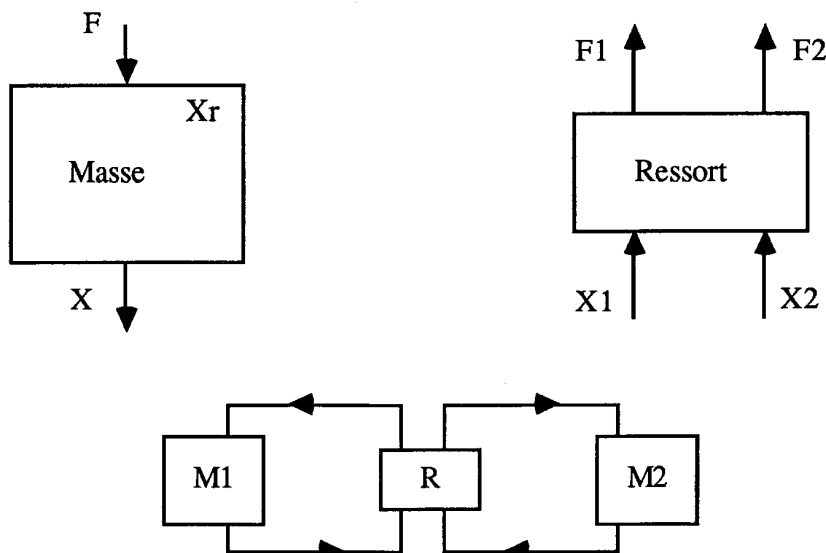


Figure 5

III. T-SIMULABILITE

Nous avons déjà indiqué que les instants d'échantillonnage des entrées et des sorties générales, c'est-à-dire en provenance et à destination de l'extérieur de l'objet représenté, sont rigoureusement synchrones et une seule horloge de période T les détermine.

Pour tout objet, l'algorithme doit calculer une ou plusieurs variables de sortie en fonction d'une ou plusieurs variables d'entrée. Dans la mesure où tout algorithme met, quelque soit la machine, un temps non nul pour s'exécuter, pour une valeur en entrée, sa conséquence en sortie ne peut intervenir au mieux qu'après ce temps de calcul. Si l'objet est seul, en fonction du principe de synchronisme entre les entrées et sorties, une sortie ne peut être influencée par une entrée qu'avec un retard T . Apparaît alors un problème : bien que les variables d'entrées et de sorties soient correctement discrétisées relativement aux conditions du théorème de Shannon, un décalage temporel peut apparaître entre le moment où l'algorithme produit un événement en sortie et celui où selon le modèle, cet événement aurait dû se produire (La figure 6 présente la meilleure situation réalisable).

Nous sommes alors conduit à considérer deux types d'objets : ceux dont les propriétés sont telles que l'influence d'une variation à l'entrée ne se fait jamais sentir en sortie dans un délai inférieur à T , et ceux pour lesquels aucune valeur de T n'est assez petite pour obtenir cette situation. Nous appellerons les premiers des **objets T-Simulables**, notés "**T**", ou simplement simulables quand il n'y aura pas d'ambiguïté, les autres seront "**non T-Simulables**, et notés "*****".

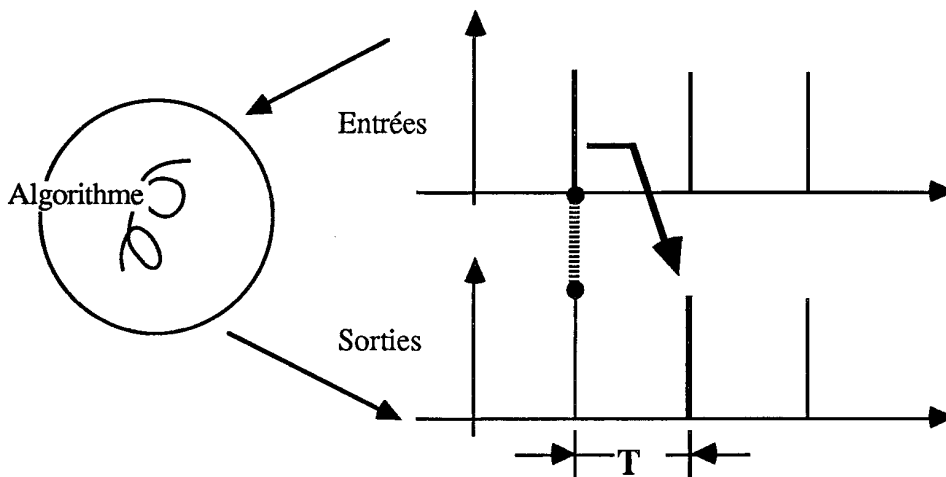


Figure 6

Nous aurons alors deux situations possibles : dans la mesure où T sera toujours définie et non nulle, ou bien l'on ne simule que des objets T-Simulables, ou bien simulant des objets non T-Simulables, on s'exposera à une dérive entre son modèle et ce que l'on simule effectivement. Remarquons toutefois que, sans le démontrer, la non-T-Simulabilité est une propriété stable, c'est-à-dire que pour un objet non T-Simulable, les dérives que nous venons d'évoquer s'atténueront de plus en plus si nous pouvons prendre des valeurs de T de plus en plus petites.

Par exemple, un des algorithmes <MAT> possible pour une masse M (soumise à une force extérieure F_n à l'instant d'indice n) est : $X_{n+1} = 2.X_n - X_{n-1} + 1/M.F_n$. Un tel objet est T-Simulable.

A l'inverse, une élasticité pure a pour loi : $F(t) = K.(X_1(t) - X_2(t))$. Avec un atome de type <LIA>, l'algorithme serait $F_n = K. (X_{1n} - X_{2n})$. C'est un objet non T-Simulable.

On ne pourra réaliser, au mieux, que : $F_{n+1} = K. (X_{1n} - X_{2n})$ qui n'est pas, loin s'en faut, une élasticité pure.

Cependant, cette élasticité pure connectée à la masse ci-dessus peut constituer un système T-simulable.

On pourrait espérer que, parmi les objets naturels que l'on souhaite simuler, il y ait peu d'éléments non-T-Simulables. Cet espoir est déçu puisque, même parmi les objets élémentaires (la masse et le ressort), l'un est T-Simulable et l'autre ne l'est pas.

Etre contraint de ne simuler que des objets "T" serait une contrainte très forte. C'est pourtant le cas où l'on est toujours assuré de la validité de tout assemblage d'objets. Dans les autres cas, simulant des objets "non-T-simulables", on prend le risque de dérives plus ou moins prévisibles et plus ou moins caractérisables entre ce que l'on obtient et ce que l'on voudrait obtenir.

Mais, nous avons vu dans l'exemple ci-dessus que des assemblages contenant des éléments non T-Simulables peuvent être globalement T-Simulables. Autrement dit, des objets "*" peuvent être simulés sans erreur, sous réserve d'être associés à des objets "T".

La question est donc : "Comment combiner des éléments "T" et des éléments "*" pour que un réseau quelconque (de type Cordis, par exemple) soit "T". Ou bien, dans quelles conditions un ou des ensembles d'éléments d'un réseau "T" peuvent-ils être "*".

La réponse à cette question est essentielle car il précise dans quelles conditions on a le droit d'utiliser des modules non T-Simulables. Il permet aussi de définir les règles permettant de "mapper" un réseau représentant un système physique sur un réseau de machines.

Un de nos résultats est le suivant :

Un réseau d'objets T ou * est simulable si et seulement si il n'existe aucun couple d'objets * qui soient directement connectés entre eux. En d'autres termes, les objets * ne peuvent être interconnectés que via des objets T.

Notons que la question de la T-Simulabilité est la conséquence simultanée :

- * de la nature discrétisée et répétitives des algorithmes de simulation ;
- * des lois de synchronisme d'entrée/sortie adoptées (cf. loi de Shannon) ;
- * de la structure de réseau qui découle des contraintes imposées par les transducteurs d'entrée/sortie considérés sous leur aspect le plus général.

Donc, étant donné un réseau de type CORDIS (réseau quelconque constitué des atomes duaux <MAT> et <LIA>) :

- * tous les éléments connectés à l'extérieur sont nécessairement T ;
- * à l'intérieur du réseau on peut faire ce que l'on veut selon les disponibilités et les nécessités à condition de respecter l'interdiction suivante : deux éléments * ne peuvent être contigus (Figure 7).

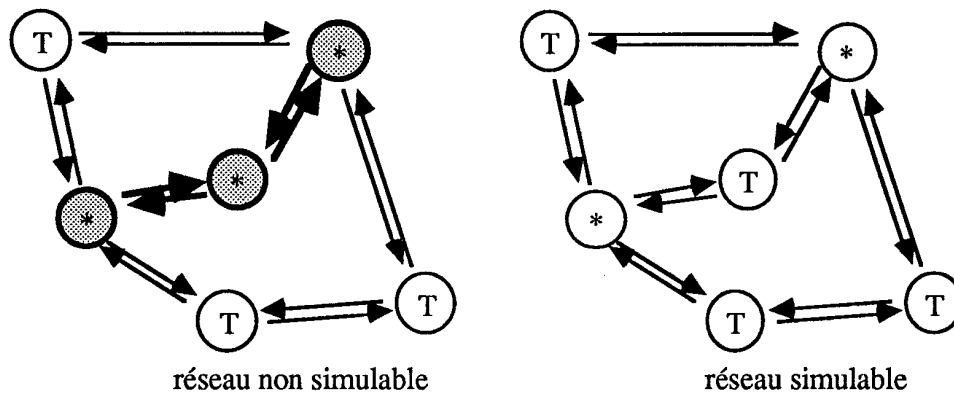


Figure 7

Si l'on observe que dans un réseau de la forme générale, quel que soit le parcours que l'on effectue en suivant les arcs, on alterne systématiquement <MAT> et <LIA>, une bonne manière de respecter la règle précédente est de décréter, sauf pour les éléments directement connectés à l'extérieur, que tous les <MAT> sont d'une catégorie, tous les <LIA> de l'autre.

IV. MODULARITE ALGORITHMIQUE

Nous devons insister sur la nécessité de conserver un assemblage de représentations distinctes.

Il est en effet tentant, pour un système simple comme un doublet masse-ressort, de le considérer dans sa totalité et, plutôt que d'assembler des algorithmes via des partages de variables, de définir un algorithme intégré spécifique. Une telle démarche est très louable mais elle possède une limite : à un moment ou à un autre il faudra cesser de faire du spécifique pour commencer à assembler.

Par analogie, il ne servirait à rien de définir une rotation d'image, puis une translation, puis une rotation-translation et ainsi de suite sans jamais s'arrêter. Il nous appartient de choisir judicieusement les objets élémentaires en fonction d'un compromis généralité-efficacité mais nous ne pouvons échapper ni au choix des composants, ni aux conséquences de l'assemblage de réseaux complexes (Figure 8).

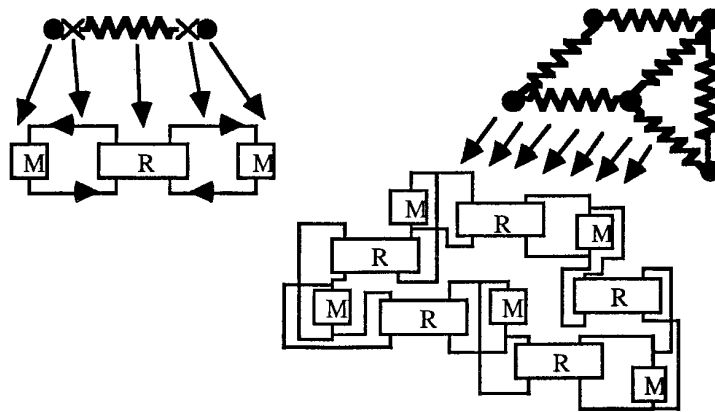


Figure 8

Le caractère "atomique" de la représentation des objets complexes associé à la nécessaire discrétisation temporelle (le tout aggravé par la quantification des variables) aura pour conséquence que l'algorithme résultant de la composition d'algorithmes élémentaires ne sera généralement pas identique à l'algorithme intégré que nous aurions pu produire par analyse du système global. Nous pouvons, dans certains cas simples, analyser précisément la différence produite par l'assemblage algorithmique T-Simulable (classiquement une mise en séquence) et isoler divers modes de distorsion imputables qui à l'échantillonnage temporel, qui à la quantification des variables, etc.

A titre d'exemple, nous avons étudié un système extrêmement simple pour lequel la solution continue est parfaitement connue. Cet objet, nommé "cellule", est constitué d'une masse attachée au sol (point fixe) par une liaison ressort-frottement (Figure 9). C'est l'oscillateur élémentaire du second ordre, correspondant à l'équation différentielle de base de la dynamique (second ordre à coefficients constants).

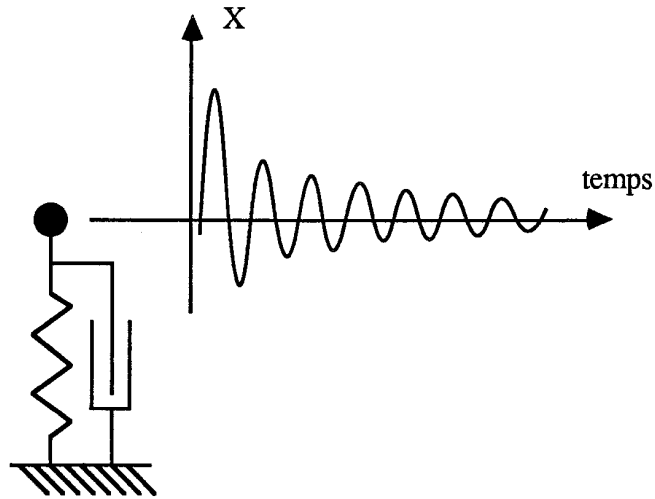


Figure 9

Un tel oscillateur, unidimensionnel, composé de l'association d'une masse m , d'un ressort de raideur k et d'une viscosité z , vérifie : $m.\ddot{x} + z.\dot{x} + k.x = 0$. La solution exacte varie d'une somme d'exponentielles amorties à une sinusoïde amortie, selon les valeurs prises par m, k, z .

$$\text{Si } z^2 - 4.m.k > 0 \quad x(t) = \sigma_1.e^{r_1.t} + \sigma_2.e^{r_2.t}$$

$$\text{avec } r_1 = \frac{-z - \sqrt{z^2 - 4.m.k}}{2.m}, \quad r_2 = \frac{-z + \sqrt{z^2 - 4.m.k}}{2.m}$$

$$\text{Si } z^2 - 4.m.k < 0 \quad x(t) = \mu_1.e^{\frac{-z.t}{2.m}}.\cos\left(\frac{\sqrt{z^2 - 4.m.k}}{2.m}.t + \mu_2\right)$$

$$\text{Si } z^2 - 4.m.k = 0 \quad x(t) = (\sigma_1 + t.\sigma_2).e^{\frac{-z.t}{2.m}}$$

Première approche : il est possible de calculer des coefficients A et B tels que la suite récurrente $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$ se développe comme un échantillonnage *exact* de $x(t)$ et ce pour n'importe quelle période d'échantillonnage T_e : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall T_e \in \mathbb{R}, \exists A, B / x(n.T_e) = X_n$

Les formules sont les suivantes :

Si $z^2 - 4.m.k > 0$

$$A = e^{\frac{-z.T_e}{2.m}} \left(e^{\frac{-T_e \sqrt{z^2 - 4.m.k}}{2.m}} + e^{\frac{T_e \sqrt{z^2 - 4.m.k}}{2.m}} \right), B = -e^{\frac{-z.T_e}{2.m}}$$

Si $z^2 - 4.m.k < 0$

$$A = 2.e^{\frac{-z.T_e}{2.m}} \cdot \cos \left(\frac{T_e \sqrt{4.m.k - z^2}}{2.m} \right), B = -e^{\frac{-z.T_e}{2.m}}$$

Si $z^2 - 4.m.k = 0$

$$A = 2.e^{\frac{-z.T_e}{2.m}}, B = -e^{\frac{-z.T_e}{2.m}}$$

Dans le cadre du formalisme modulaire de CORDIS-ANIMA, cela signifie que nous pouvons réaliser un algorithme *intégré* qui représente la cellule de façon parfaite, pour toute fréquence d'échantillonnage aussi faible soit-elle.

Deuxième approche : nous pouvons aussi discrétiser l'équation différentielle d'un oscillateur élémentaire ($m.\ddot{x} + z.\dot{x} + k.x = 0$) afin d'obtenir une équation aux différences. Pour cela, nous devons choisir des expressions discrètes, nécessairement approchées, de \ddot{x} et de \dot{x} .

Pour un échantillonnage T_e , il peut y avoir plusieurs schéma de discrétisation :

- vitesse retardée $\dot{x} \approx \frac{X_n - X_{n-1}}{T_e} \quad (VR)$

- vitesse centrée $\dot{x} \approx \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2.T_e} \quad (VC)$

- vitesse avancée $\dot{x} \approx \frac{X_{n+1} - X_n}{T_e} \quad (VA)$

- accélération retardée $\ddot{x} \approx \frac{X_n - 2.X_{n-1} + X_{n-2}}{T_e^2} \quad (AR)$

- accélération centrée $\ddot{x} \approx \frac{X_{n+1} - 2.X_n + X_{n-1}}{T_e^2} \quad (AC)$

Chaque "schéma de discrétisation" (cad chaque couple d'expressions pour \dot{x}, \ddot{x}) va déboucher sur des équations aux différences distinctes mais, en principe, convergentes quand T_e tend vers 0 (i.e. quand la fréquence d'échantillonnage tend vers l'infini).

Nous effectuerons le changement de variables $K = \frac{k}{m.F_e^2}$ et $Z = \frac{z}{m.F_e}$, afin de simplifier les écritures. Ce changement de variables correspond au passage en "unités normalisées" - choix de l'échantillon comme unité de temps et de la masse m comme unité de masse.

Nous donnons ci-après quelques développements de schémas de discrétisation en leur équivalent sous forme de suites récurrentes du deuxième ordre (le premier schéma est le classique schéma d'Euler) :

$$\begin{aligned} \text{(AR-VR)} \quad & m \cdot \frac{X_n - 2.X_{n-1} + X_{n-2}}{T_e^2} + z \cdot \frac{X_n - X_{n-1}}{T_e} + k.X_n = 0 \\ & X_{n+1} = \left(\frac{2+Z}{1+Z+K} \right) X_n + \left(\frac{-1}{1+Z+K} \right) X_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(AC-VR)} \quad & m \cdot \frac{X_{n+1} - 2.X_n + X_{n-1}}{T_e^2} + z \cdot \frac{X_n - X_{n-1}}{T_e} + k.X_n = 0 \\ & X_{n+1} = (2-K-Z).X_n + (Z-1).X_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(AC-VC)} \quad & m \cdot \frac{X_{n+1} - 2.X_n + X_{n-1}}{T_e^2} + z \cdot \frac{X_{n+1} - X_n}{T_e} + k.X_n = 0 \\ & X_{n+1} = \left(\frac{2-K+Z}{Z+1} \right) X_n + \left(\frac{-1}{Z+1} \right) X_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(AC-VA)} \quad & m \cdot \frac{X_{n+1} - 2.X_n + X_{n-1}}{T_e^2} + z \cdot \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2.T_e} + k.X_n = 0 \\ & X_{n+1} = \left(\frac{2-K}{\frac{Z}{2} + 1} \right) X_n + \left(\frac{-1 + \frac{Z}{2}}{\frac{Z}{2} + 1} \right) X_{n-1} \end{aligned}$$

Dans tous les cas apparaissent des suites numériques d'ordre 2, avec différentes expressions de A,B en fonction de K,Z. Ces diverses suites ne ressemblent guère à la suite récurrente obtenue par échantillonnage de la solution continue. Nous savons a priori que si la fréquence d'échantillonnage tend vers l'infini, les distorsions vont s'atténuer jusqu'à disparaître (un problème surgira néanmoins de la quantification des variables, voir plus loin). En tout état de cause, nous avons ci-dessus toutes les formules nécessaires pour calculer ces distorsions.

Troisième approche : nous pouvons établir deux équations aux différences, une pour la masse (avec un schéma de discrétisation AC-VR), une pour le ressort et l'amortisseur, et combiner ces algorithmes élémentaires via les règles d'assemblage de CORDIS-ANIMA.

$$\begin{aligned}(1) X_{n+1} &= 2.X_n - X_{n-1} + 1/M.F_n \\ (2) F_n &= -K.X_n - Z.(X_n - X_{n-1})\end{aligned}$$

Le premier algorithme est T-Simulable, le second ne l'est pas, mais nous avons le droit de les connecter pour obtenir un réseau simulable. Dans ce cas simple il est facile de voir que, quel que soit l'ordre de calcul de ces deux algorithmes, leur mise en séquence est cohérente du point de vue des indices. Par exemple, si l'on calcule (2) puis (1), F_n apparaît comme une simple variable intermédiaire et l'on obtient l'algorithme équivalent :

$$X_{n+1} = (2-K-Z).X_n + (Z-1).X_{n-1}$$

On retrouve ici une des solutions précédentes. Remarquons néanmoins que les autres schémas de discrétisation (VC-AC ou autres) ne fournissent pas d'algorithme T-Simulable pour la masse. Comme le ressort-frottement est aussi non-T-Simulable, il nous est interdit de les connecter.

Examinons maintenant quelques conséquences de la quantification des paramètres et des variables.

Dans un premier temps, partons de l'équation récurrente $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$ et supposons que seuls les paramètres A,B sont quantifiés (ie. discrets). Supposons par exemple qu'il s'agit d'un format flottant à p bits de mantisse (bit caché compris). Seules certaines valeurs particulières de A,B seront alors accessibles (que ces valeurs soient "entières" ou "flottantes", elles conservent un caractère identiquement discret).

L'oscillateur non-amorti (produisant une sinusoïde pure) correspond à la condition $A < 2$, $B = -1$. La masse libre (ressort et amortisseur nul) correspond à $A = 2$, $B = -1$. Posons-nous alors la question de la plus petite fréquence d'oscillation atteignable du fait de la quantification de A.

La plus grande valeur flottante de A, distincte de 2, est $(2 - 1/2^p)$. Connaissant les formules (non démontrées ici) liant la fréquence aux coefficients A,B, nous pouvons en déduire la fréquence minimum simulable :

$$F = \frac{f}{F_e} = \frac{1}{2\pi} \text{Arccos}\left(\frac{A}{2\sqrt{-B}}\right) \quad \text{d'où} \quad f_{\min} = \frac{F_e}{2\pi} \text{Arccos}\left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

Il importe surtout de remarquer que f_{\min} est croissante selon la fréquence d'échantillonnage. Ceci signifie donc que la réduction des distorsions évoquées précédemment, par augmentation de F_e , est un procédé qui a ses limites. Nous sommes "pris en sandwich" entre deux aspects de la discrétisation - si la fréquence d'échantillonnage est élevée, les distorsions sont réduites, mais, du fait de la quantification

des paramètres, les comportements lents deviennent inaccessibles. Si nous voulons une amélioration sans contrepartie il faut augmenter conjointement la fréquence de calcul et le nombre de bits codant les variables. Le rapport à maintenir peut être calculé d'après les considérations ci-dessus, compte tenu des contraintes de l'application.

Dans un second temps, toujours dans l'équation $X_{n+1} = A.X_n + B.X_{n-1}$ nous pouvons admettre que A,B et les X sont quantifiés et que les calculs (multiplications, addition) sont limités en précision. Il va donc y avoir un cumul d'erreur relativement incontrôlable - le processus ressemble d'ailleurs à certaines méthodes de génération de séquences pseudo-aléatoires. Nous devons néanmoins faire deux remarques quand au contexte de CORDIS-ANIMA qui relativise ce type d'erreur : tout d'abord il s'agit ici de simulation de phénomènes acoustiques, et, dans ce cas, l'exactitude à l'échantillon prêt n'est pas pertinente pour la perception ; il s'agit d'un phénomène amorti donc l'erreur n'a qu'un temps limité pour se développer avant que le système revienne au repos.

La difficulté d'une analyse complète associée à ces deux considérations nous a conduit à mener une étude expérimentale par balayage de l'espace des paramètres A,B et par comparaison entre la fréquence mesurée et la fréquence théorique (cf. formules ci-dessus). Des résultats préliminaires semblent indiquer que les erreurs se répartissent aléatoirement, tel un "niveau de bruit" qui décroîtrait rapidement en fonction du nombre de bits de la quantification. Ceci demanderait à être confirmé par un analyse plus complète.

V. CONCLUSIONS

Les questions soulevées dans cette présentation proviennent d'un travail approfondi concernant l'élaboration d'un système "Modeleur-Simulateur" d'objets physiques communicant avec l'univers réel. La problématique de la physique discrète est inhérente à ce projet même. Elle ne constitue pas cependant l'orientation principale de l'équipe. Quand au fond commun avec la géométrie discrète, il s'agit de considérations naissantes, davantage à développer et à reconsidérer que d'affirmations assises.

Les principes généraux présentés ici, c'est à dire la déduction des atomes à partir des contraintes de communications incontournables imposées par les transducteurs et la nécessité d'un couple d'atomes duaux, nous semblent être des principes stables indépendants de l'application visée, valables pour toute représentation d'objets physiques par un ordinateur.

Si les premières simulations physiques efficaces d'objets déformables apparues vers 1987 étaient orientées "physique des milieux continus" (Terzopoulos, Platt, Barr ...), la problématique "masse-ressort-frottement" a été ensuite largement adoptée. Or, cette problématique est essentiellement discrète et totalement liée aux principes ci-dessus.

A propos des atomes duals : nous avons, pendant plusieurs années, cherché à contredire la nécessité du couple d'atomes pour la physique, pour fonder un système à atome unique. Nous n'y sommes pas arrivé. Cette dualité, au niveau des constituants élémentaires, nous semble provenir de la présence de variables duales pour décrire le comportement des systèmes physiques. La démonstration n'est pas faite.

En ce qui concerne le choix des algorithmes, c'est là que se situe le lien avec la connaissance en physique du continu. C'est ainsi que l'on peut choisir des composants physiques élémentaires comme la masse, l'élasticité, la viscosité, pour remplir les atomes et c'est le choix que nous avons fait. Non sans nous poser la question d'un autre choix, celui de remplir ces atomes par des objets radicalement arithmétiques, tels que des suites du second ordre. Affaire à reprendre peut-être.

BIBLIOGRAPHIE

- C. Cadoz, A. Luciani, J.L. Florens, O. Raoult - "CORDIS - ANIMA : Système de modélisation et de simulation d'instruments et d'objets physiques pour la création musicale et d'images animées" - Colloque Modèles physiques et Création musicale - ACROE - Grenoble 1990
- A. Luciani, S. Jimenez, O. Raoult, C. Cadoz, J.L. Florens - "An unified view of multitude behaviour, flexibility, plasticity and fractures : balls, bubbles and agglomerates" - Modeling in Computer Graphics - Kunii ed. - Springer Verlag 1991
- A. Luciani, S. Jimenez, J.L. Florens, C. Cadoz, O. Raoult - "Computational physics: a modeler-simulator for animated physical objects " - Eurographics '91 - Vienne